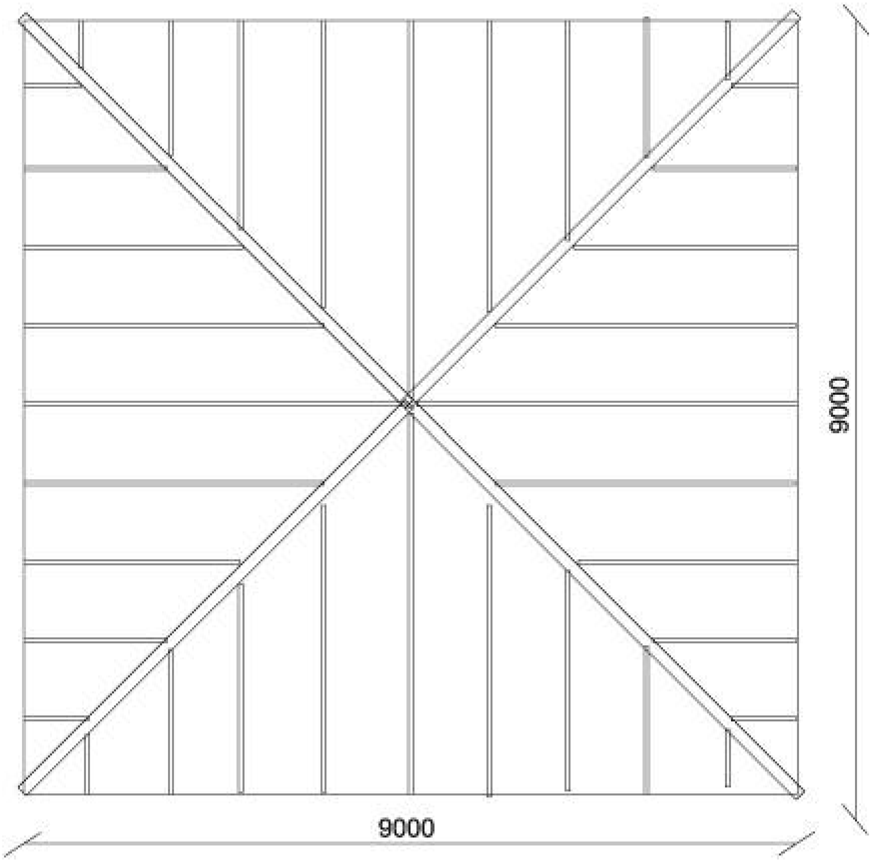
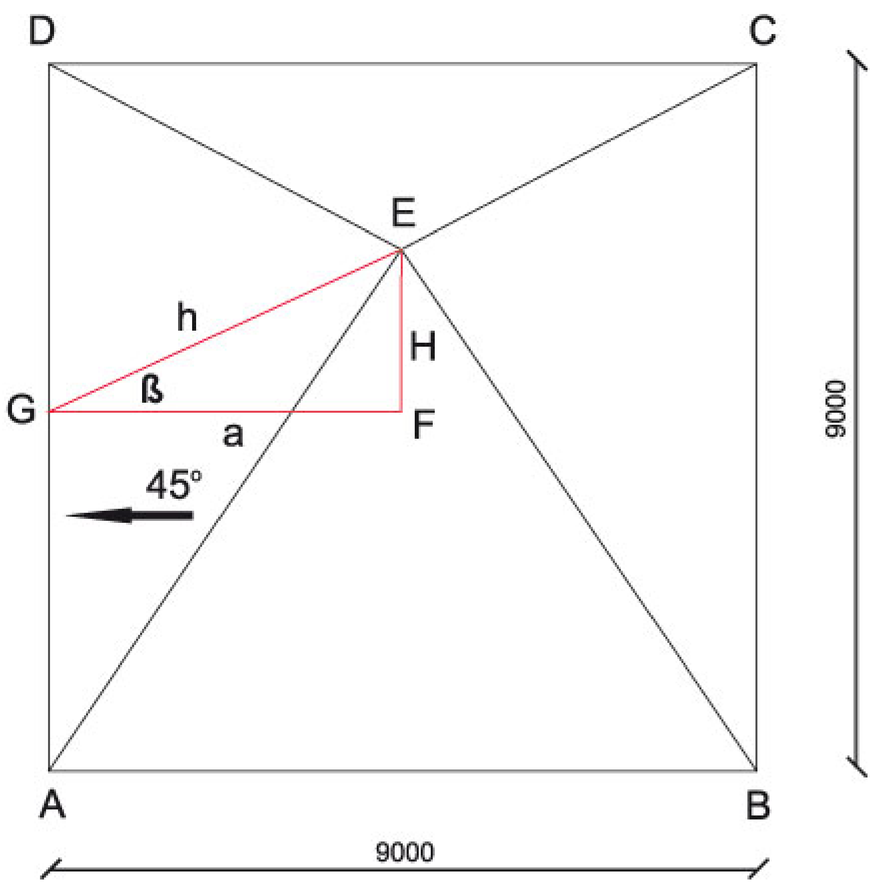
Geometria w praktyce, cz. 2. Dach czterospadowy i kopertowy



Rys. 1. Dach kopertowy z połaciami nachylonymi pod tym samym kątem

Lekcja 4: koperta
Dach kopertowy, po dachu pulpitowym i dwuspadowym stanowi kolejny krok w naszej podróży matematycznej przez konstrukcje dachowe.

Dach kopertowy składa się z czterech połaci dachowych, zazwyczaj nachylonych pod tym samym kątem.



Rys. 2

Gdzie:
H – wysokość dachu
h – wysokość połaci dachowej
AB, BC, CD, DA – długości podstaw połaci dachowych
E – wierzchołek dachu
B – kąt nachylenia połaci dachowej, tu: 45^o

Musimy jeszcze zauważyć, że w naszym przypadku rzut wierzchołka dachu przypada dokładnie na środku rzutu dachu. Zatem długość odcinka GF jest równy połowie długości odcinka AB, zatem jest to 4,5 m.

Dach kopertowy składa się z czterech trójkątnych połaci, potrzebny więc będzie podstawowy wzór na pole trójkąta:

$$P_{trójkąta} = \frac{1}{2} a \bullet h$$

gdzie:
a – podstawa trójkąta
h – wysokość trójkąta

Przyjrzyjmy się rzutowi perspektywicznemu dachu kopertowego.

Powierzchnia połaci ADE będzie wynosić:

$$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h$$

Jak możemy zauważyć, nie znamy wysokości naszej połaci. Musimy ją więc obliczyć. Przydatna będzie tu funkcja tangens (tangens kąta alfa to stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kata alfa do długości drugiej przyprostokątnej). Dla naszych oznaczeń:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{H}{GF}$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$H = \mathrm{tg}\,\beta \cdot GF$$

Tg beta dla 45º jest równy 1 (wartość odczytujemy z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów w trójkącie).

Zatem wysokość H dachu jest równa długości GF – wysokość jest równa 4,5 m.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa możemy teraz swobodnie obliczyć wysokość wysokość połaci dachowej:

$$h^2 = GF^2 + H^2$$
$$h = \sqrt{GF^2 + H^2}$$

zatem

$$h = \sqrt{4{,}5^2 + 4{,}5^2}$$
$$h = 6{,}36 \text{ m}$$

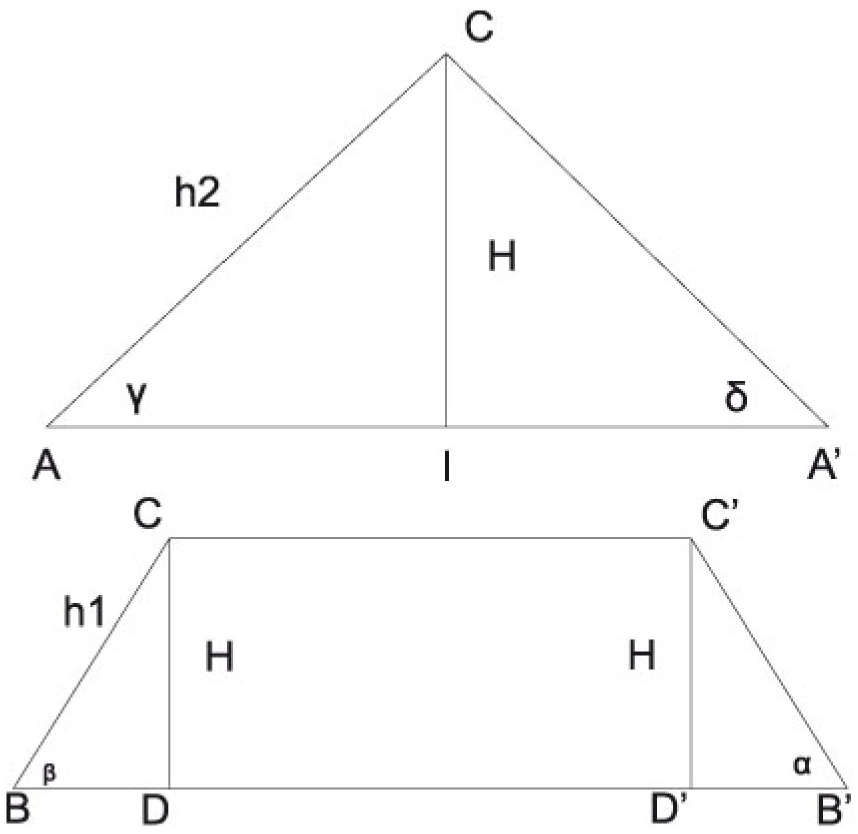
Mając już wysokość połaci możemy obliczyć jej powierzchnię.

$$P_{\text{połaci AED}} = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot h$$
$$P_{\text{połaci AED}} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}0 \text{ m} \cdot 6{,}36 \text{ m}$$
$$P_{\text{połaci AED}} = 28{,}62 \text{ m}^2$$

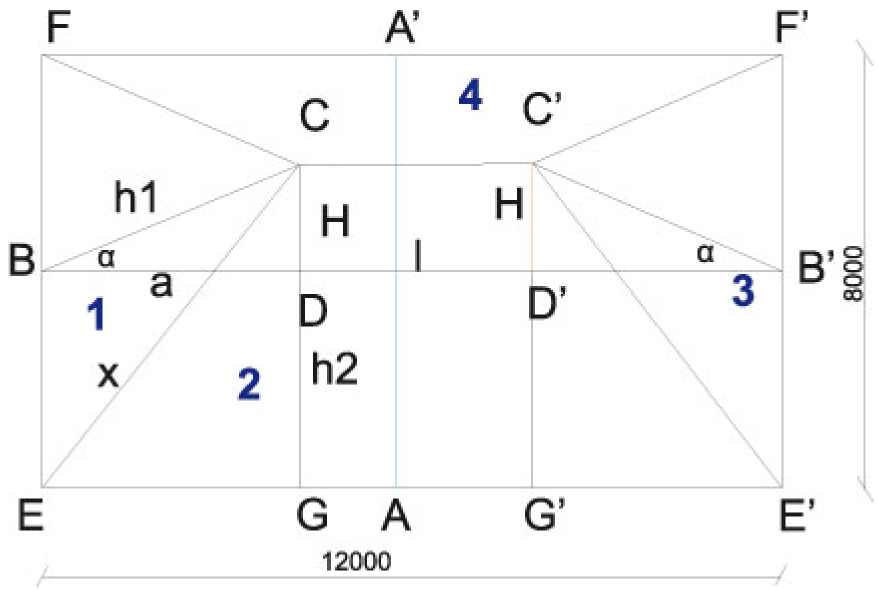
Jako że założyliśmy równość kąta nachylenia wszystkich połaci, to powierzchnia całego dachu będzie równa czterokrotności powierzchni połaci AED.

$$P_{\text{dachu}} = 4 \cdot 28{,}62 \text{ m}^2 = 114{,}48 \text{ m}^2$$

Lekcja 5: koperta z kalenicą, czyli dach czterospadowy
Dach czterospadowy może mieć dwie pary połaci o tym samym kącie nachylenia lub też każda z czterech połaci dachowych charakteryzuje się innym kątem pochylenia
Przekroje dachu o dwóch parach połaci o tym samym kącie nachylenia prezentuje rys. 3, zaś rzut perspektywiczny prezentuje rys. 4.



Rys. 3. Dach z dwiema połaciami o takim samym kącie nachylenia



Rys. 4. Dach z rys. 3 w rzucie perspektywicznym

Zatem obliczmy powierzchnię dachu o rzucie z rys. 4.

Przyjmijmy następujące założenia:

- kąt beta, alfa są sobie równe i wynoszą 70º zaś kąty gamma, sigma wynoszą 60º ,
- długości boków AA’ i FE i F’E’ są sobie równe i wynoszą 8 m, zaś EE’, BB’ i FF’ mają po 12 m.

W związku z faktem, że mamy do czynienia z trójkątem równoramiennym AA’C, wysokość H dzieli podstawę na dwie równe części AI = IA’.

Pierwszą rzeczą, którą musimy zrobić to wyliczenie wysokości dachu H. Korzystając z twierdzenia tangensów mamy:

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{H}{AI}$$

$$H = \mathrm{tg}\,\gamma \cdot AI$$
$$\mathrm{tg}\,40^{o} = 0{,}839$$
$$H = 0{,}839 \cdot 4\ \mathrm{m} = 3{,}36\ \mathrm{m}$$

Mając wysokość dachu możemy obliczyć wysokość połaci 1 i 3:

$$\sin\alpha = \frac{H}{h1}$$
$$h1 = \frac{H}{\sin 70^{o}}$$
$$h1 = 3{,}57\ \mathrm{m}$$

Możemy teraz wyliczyć z pola powierzchni trójkąta wyliczyć pole połaci 1 i 3:

$$P_{\text{połaci 1.EFC}} = \frac{1}{2} EF \cdot h1$$
$$P_{\text{połaci 1.EFC}} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3{,}57$$
$$P_{\text{połaci 1.EFC}} = 14{,}28\ \mathrm{m}^2$$

Pola połaci 1 i 3 są sobie równe.

Kolejnym krokiem będzie wyliczenie długości odcinka a z trójkąta BDC. Odcinek ten odpowiada długościom odcinków EG i E’G’.

Tu możemy już skorzystać z twierdzenia Pitagorasa:

$$h1^2 = a^2 + H^2$$
$$a = \sqrt{h1^2 - H^2}$$
$$a = \sqrt{1,45}$$
$$a = 1,20\ m = BD = D'B'$$

Kolejnym etapem jest przypomnienie sobie wzoru na pole powierzchni trapezu:

Ptrapezu = 1/2 (a + b) • h

Wzór ten jest nam niezbędny, aby policzyć powierzchnię połaci ECC'E' (rys. 5).

Zatem musimy znaleźć długości boków EE' i CC':
Odcinek EE' = EG + GG' + G'E'
12 m = 1,20 m + GG'+ 1,20 m
GG'= CC' = 9,60 m

Wysokość h2 połaci 2 jest równa:

$$h2 = AI^2 + H^2$$
$$h2^2 = 4^2 + 3,36^2$$
$$h2 = \sqrt{27,29}$$
$$h2 = 5,22\ m$$

Teraz mamy wszystkie dane do wyliczenia pola połaci (EE' CC'):

$$P_{połaci\ 2} = \frac{1}{2}(CC' + EE') \cdot h2$$
$$P_{połaci\ 2} = \frac{1}{2}(9,60 + 12) \cdot 5,22$$
$$P_{połaci\ 2} = 56,38\ m^2$$

Pola połaci 2 i 4 są sobie równe.

Pole powierzchni dachu jest równe sumie pól połaci 1 do 4:

Powierzchnia dachu = $P_{połaci\ 1} + P_{połaci\ 2} + P_{połaci\ 3} + P_{połaci\ 4}$

$P_{dachu} = 141,32\ m^2$

Jak widać, nie trzeba znać zaawansowanej matematyki, żeby prawidłowo wyliczyć powierzchnię dachu.

W kolejnej części zajmiemy się wyliczaniem długości krawędzi, powierzchni połaci dachu czterospadowego o wszystkich czterech kątach nachylenia połaci różnych od siebie, a także dachami mansardowymi.

Monika A. Tomaszewska-Rzęsista

Przedstawione rysunki mają charakter poglądowy i w żaden sposób nie mogą być traktowane jako wskazówki konstrukcyjne.

Źródło: Dachy, nr 1 (133) 2011