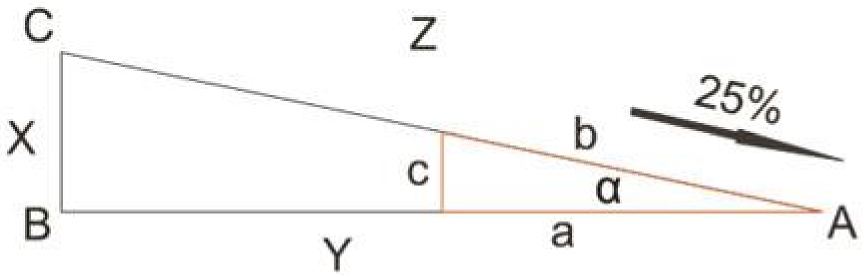
Geometria w praktyce, cz. 1. Dach pulpitowy i dwuspadowy

wego czasu, ucząc młodzież matematyki słyszałam wielokrotnie narzekania, że to czego uczą w szkole, nijak się ma do rzeczywistości i jest nieprzydatne. Bardzo mnie cieszy fakt,
że mogę teraz udowodnić, iż wszystko, co mówili na matematyce, jest nam w życiu niezbędne – chociażby przy budowie domu!



Rys. 1

Lekcja 1: procenty
Wprawdzie procenty nie wszystkim kojarzą się z matematyką, ale w dekarstwie oznaczają różnicę między położeniem okapu a kalenicy na odcinku długości 100 jednostek.

Informacja w projekcie mówiąca, że dach ma 25% spadku oznacza ni mniej ni więcej, że na każdym metrze rzutu poziomego połaci dachowej na płaszczyznę różnica wysokości między okapem a kalenicą wynosi 25 centymetrów.

Oznaczenia:
X – różnica wysokości miedzy okapem a kalenicą
Y – rzut poziomy połaci dachowej
Z – długość połaci dachowej
a – rzut poziomy połaci dachowej o długości 100 cm
b – długość połaci dachowej dla rzutu poziomego o długości 100 cm
c – różnica wysokości między okapem a kalenicą dla rzutu poziomego o długości 100 cm

Zakładając, że a = 100 cm i że zgodnie z rysunkiem spadek = 25%, otrzymujemy:

c = 100 cm • (25%/100%) = 100 cm
• 0,25 = 25 cm.

Oczywiście jest to tylko wzór, w którym dla łatwiejszego zrouzmienia przyjęte zostały pełne wielkości, ale posługując się powyższym szablonem można dokonywać odpowiednich wyliczeń dla dowolnych wielkości.

I tak przykładowo, znając długość rzutu połaci na płaszczyznę (Y) i różnicę wysokości (X) można z łatwością wyliczyć spadek dachu w %.

spadek w % = (X/Y) • 100%

W dalszych rozważaniach przyda się twierdzenie Talesa. Co ciekawe, twierdzenie to jak żadne inne związane jest ściśle z budownictwem. Otóż grecki uczony Tales bardzo chciał wiedzieć, jaka wysokość ma piramida Cheopsa. Przychodził on pod piramidę i wpatrywał się w nią; na obserwacjach upłynęło mu lato, jesień, zima i …eureka! Na podstawie punktu odniesienia (kołka wbitego w piasek) i cienia piramidy stworzył zasadę proporcjonalności poszczególnych odcinków trójkąta (kąta) przeciętego prostymi równoległymi.

Jak to się ma do naszego dachu? Wróćmy do rys. 1. Długość połaci możemy wyliczyć właśnie dzięki Talesowi i odkrytej przez niego zależności:

$$\frac{X \text{ (różnica wysokości między okapem a kalenicą)}}{Y \text{ (długość rzutu poziomego połaci dachowej)}} = \frac{25 \text{ cm}}{100 \text{ cm}}$$

Załóżmy, że Y (długość rzutu poziomego połaci dachowej) jest równy 7,5 m (750 cm. Uwaga – ważne jest, aby w obliczeniach stosować te same jednostki: albo cm, albo m!)

X • 100 cm = Y • 25 cm
X = (750 cm • 25 cm) / 100 cm
Różnica wysokości między okapem a kalenicą = 187,5 cm

Teraz musimy zająć się kolejnym wielkim naukowcem Pitagorasem, który spisał twierdzenie mówiące, że kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym.

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

Zgodnie z rys. 1 oznacza to, że kwadrat długości połaci dachowej jest równy sumie kwadratów długości rzutu poziomego połaci dachowej i różnicy wysokości między okapem a kalenicą dachu.

Zatem:

$$\mathbf{Z^2 = Y^2 + X^2}$$

(Pamiętamy o możliwości zamiany % na ułamki dziesiętne zgodnie z zasadą

$$\frac{a\%}{100\%} = 0{,}a = a\%$$

Spadek dachu zapisany jako 25% można także zapisać w innej postaci:
25% • 100% = 0,25.

Otrzymujemy więc wzór:

$$Z^2 = \left(Y^2 \cdot \left(\frac{a}{100}\right)^2\right) + Y^2$$

Po przekształceniach otrzymujemy wzór ostateczny:

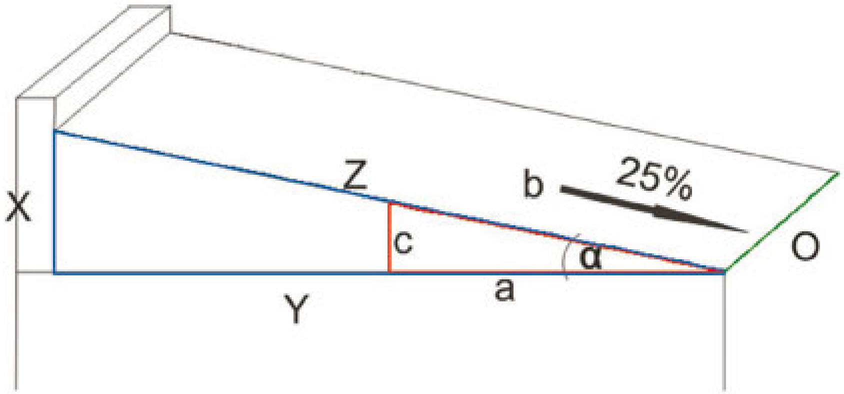
$$Z = Y \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{100}\right)^2 + 1}$$

Czyli dla naszego dachu:

$$Z = 750 \text{ cm} \cdot \sqrt{0{,}0625 + 1} = 773{,}08 \text{ cm}$$

Ale gdzie jest nasz dach?

Oto i nasz trójkąt wrysowany w przekrój fragmentu budynku – p. rys. 2.



Rys. 2

Powierzchnia dachu P to długość połaci dachowej Z mnożona przez długość okapu O. (Należy pamiętać, aby przed wyliczaniem zamienić długości podane w centymetrach na metry!).

POWIERZCHNIA DACHU = Z • O

Przyjmując, że okap ma długość 8,5 metra, połać będzie miała powierzchnię:

$P_{dachu} = 8{,}39 \text{ m} \cdot 8{,}5 \text{ m} = 65{,}71 \text{ m}^2$

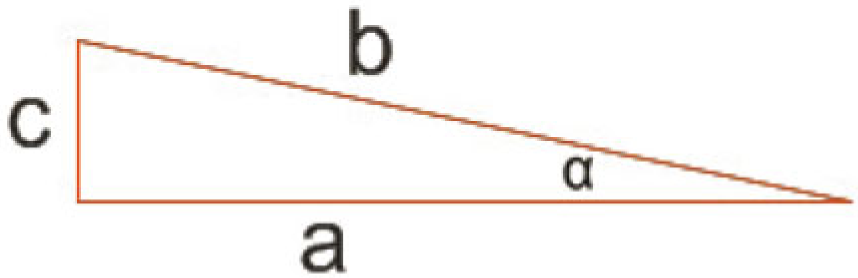
Lekcja 2: stopnie
Skoro już wiemy, jak postępować z procentami, przejdźmy do stopni. Stopnie to druga z miar wykorzystywana do określania nachylenia połaci dachowej.

Tu przydatne będą funkcje trygonometryczne, czyli funkcje kątów w trójkącie prostokątnym, takim jak na rys. 3.

W trójkącie przyprostokątnym istnieją następujące podstawowe zależności:

- sinus kąta alfa – stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta alfa do długości przeciwprostokątnej;
- cosinus kąta alfa – stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie alfa do długości przeciwprostokątnej;
- tangens kąta alfa – stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta alfa do długości drugiej przyprostokątnej;
- cotangens kąta alfa – stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie alfa do długości drugiej przyprostokątnej.

Sinus i cosinus nazywane są funkcjami przeciwprostokątnej, zaś tangens i cotangens funkcjami przyprostokątnych.



Rys. 3

Zgodnie z rys. 3 mamy:

$$\sin\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{b}$$

$$tg\,\alpha = \frac{c}{a}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{a}{c}$$

Wracamy do rys. 2. Znajdujemy na nim kąt alfa – kąt nachylenia połaci dachowej. Mając do dyspozycji kąt nachylenia połaci dachowej oraz długość rzutu poziomego Y lub różnicę wysokości między okapem a kalenicą X, możemy wyliczyć powierzchnie połaci. Zazwyczaj łatwiej jest znaleźć długość rzutu połaci dachowej (wyczytać choćby z projektu lub samemu obmierzając), dzięki czemu można wyliczyć powierzchnię połaci z wzoru:

$$\cos\alpha = \frac{Y = \text{długość rzutu poziomego połaci dachowej}}{Z = \text{długość połaci dachowej}}$$

Zatem długość połaci dachowej jest równa długości rzutu poziomego połaci dachowej pomnożonej przez wartość funkcji cosinus kąta nachylenia połaci dachowej:

$$Z = \frac{Y}{\cos \alpha}$$

Powierzchnię dachu otrzymamy mnożąc długość połaci dachowej przez długość okapu:

$P_{dachu} = Z \cdot O$

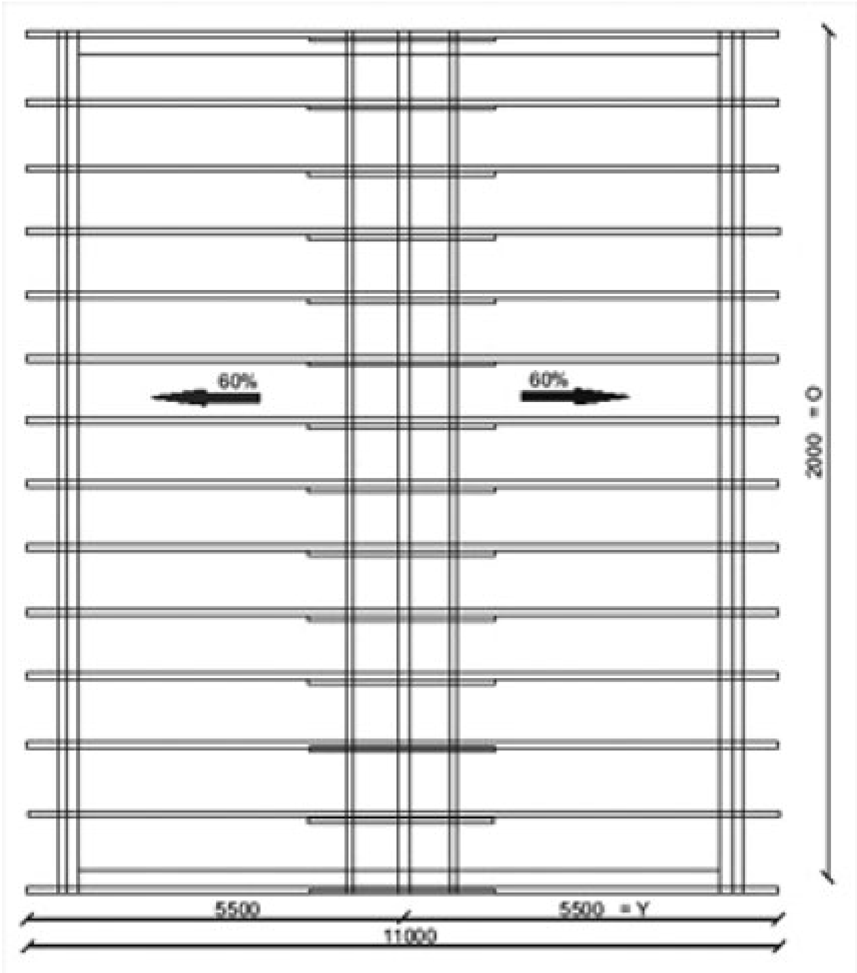
Kąt nachylenia połaci dachowej	Wartość cosinusa kąta
5°	0,996
10°	0,985
15°	0,966
20°	0,940
25°	0,906
30°	0,866
35°	0,819
40°	0,766
45°	0,707
50°	0,643
55°	0,574
60°	0,500
65°	0,423

Tabela 1. Wartość cos alfa dla najczęściej spotykanych kątów

Lekcja 3: zajęcia praktyczne

Do tej pory zajmowaliśmy się dachami jednospadowymi, ale dokładnie te same wzory możemy stosować dla dachów dwuspadowych. Na takim dachu przeprowadzimy ćwiczenia w obliczaniu powierzchni połaci dachowej.

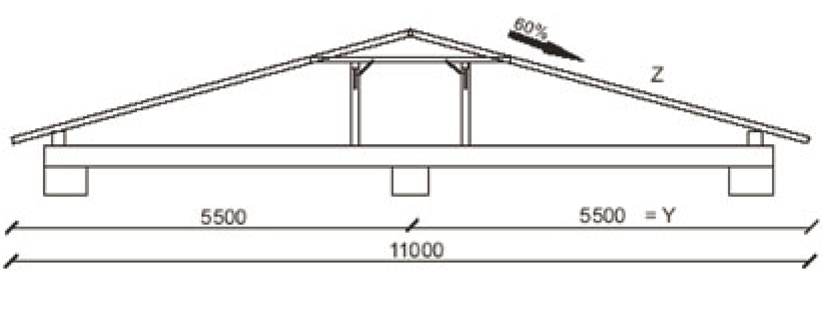
Rysunki poniżej przedstawiają rzut połaci dachowej oraz jej przekrój.



Rys. 4. Rzut połaci dachowej

Z rysunku możemy odczytać następujące dane:

Długość okapu O wynosi 20000 mm = 20 m.
Długość rzutu poziomego połaci dachowej Y = 5500 mm = 550 cm.
Spadek połaci dachowej = 60%



Rys. 5. Przekrój połaci dachowej

Korzystając z wzoru

$$Z = Y \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{100}\right)^2 + 1}$$

otrzymujemy

$$Z = 550 \bullet \sqrt{\left(\frac{60}{100}\right)^2 + 1}$$

Z = 550 cm • 1,166
Z = 641,3 cm = 6,41 m

Powierzchnia jednej połaci dachu P wynosi:

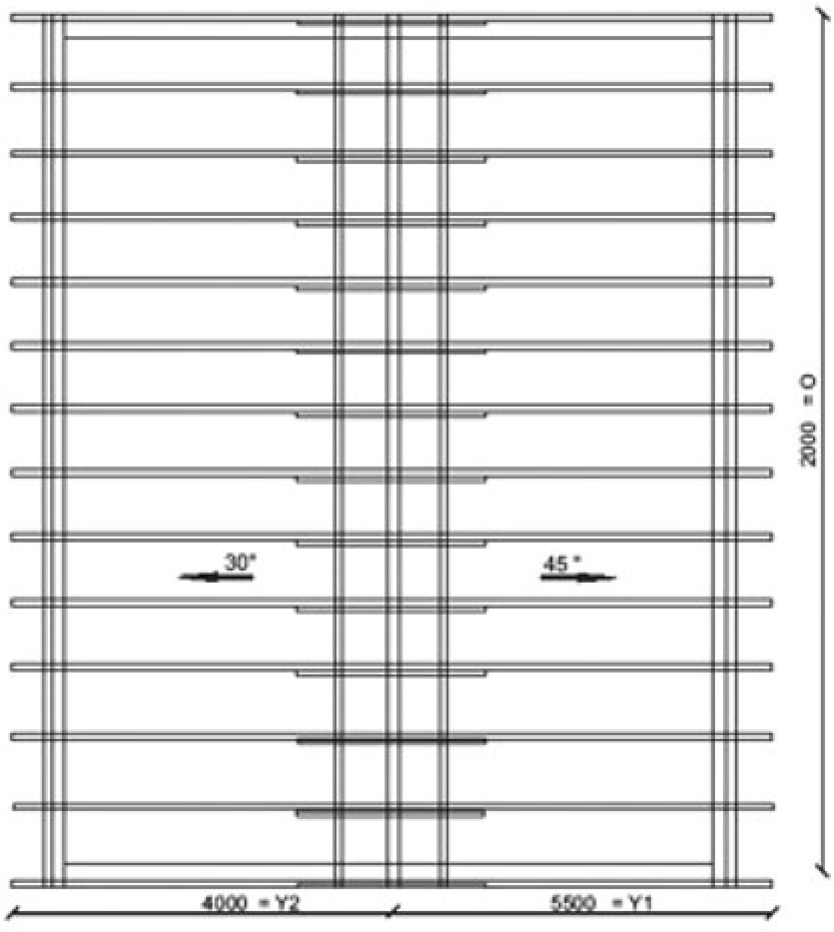
P = Z • O
P = 6,41 m • 20 m = 128,20 m^2

W związku z tym, że dach jest symetryczny, otrzymaną powierzchnię jednej połaci należy pomnożyć przez 2, co daje łączną powierzchnię:

$$\mathbf{P_{dachu} = 128{,}20\ m^2 \bullet 2 = 256{,}4\ m^2}$$

W przypadku, gdy mamy do czynienia z dachem, gdzie połacie nie mają jednakowych spadków, postępujemy analogicznie do przykładu podanego niżej, obliczając każdą z połaci oddzielnie, a następnie wyniki sumując.

Przejdźmy teraz do przykładu, w którym dach ma podany spadek w mierze kątowej, a połacie są pochylone pod różnymi kątami.



Rys. 6. Dach z połaciami o różnych spadkach

Obliczenia należy wówczas przeprowadzić oddzielnie dla obu połaci, a wyniki zsumować.

Połać 1
Długość okapu O wynosi 20000 mm = 20 m.

Długość rzutu poziomego połaci dachowej:
Y1 = 5500 mm = 5,50 m

Stopień spadku połaci dachowej alfa = 45º.

Korzystamy z równania

$$Z = \frac{Y}{\cos\alpha}$$

Dla naszego przypadku

$$Z_1 = \frac{Y_1}{\cos 45^\circ}$$

Wartość cos 45° odczytujemy z tabeli: 0,707.

Zatem

$$Z_1 = \frac{5{,}5\ \mathrm{m}}{0{,}707} = 7{,}78\ \mathrm{m}$$

Powierzchnia połaci P_1 wynosi:

P1 = 7,78 m • 20 m = 155,6 m^2

Analogicznie postępujemy w przypadku drugiej połaci

Długość okapu O = 20000 mm = 20 m

Długość rzutu poziomego połaci dachowej:
Y2 = 4000 mm = 4 m

Stopień spadku połaci dachowej alfa = 30º.

$$Z_2 = \frac{Y_2}{\cos 30°}$$

Cos 30° odczytany z tabeli: 0,866

Zatem

$$Z_2 = \frac{4\ \mathrm{m}}{0{,}866} = 4{,}62\ \mathrm{m}$$

Powierzchnia połaci drugiej

P_2 = Z2 • O = 92,4 m
Łączną powierzchnię dachu otrzymujemy po zsumowaniu obu powierzchni:

$P_1 + P_2 = P_{dachu} = 248\ m^2$

W przypadku, gdy obie połacie mają jednakowy kąt nachylenia obliczamy powierzchnię jednej z nich, a następnie mnożymy przez 2.

Monika A. Tomaszewska-Rzęsista

Przedstawione rysunki mają charakter poglądowy i w żaden sposób nie mogą być traktowane jako wskazówki konstrukcyjne

Źródło: Dachy, nr 6 (114) 2009

Usługi Ciesielskie - domy drewniane - domy szkieletowe - konstrukcje dachowe więźby - www.lech-bud.org